www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE D'ELEVE ATTACHE et

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE JUIN 1989

ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

(Division des Cadres de Gestion Statistique) OPTION A

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (Durée : 3 heures)

Dans ce problème $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Une matrice M appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, $M = (m_{ij})$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, sera dite de type T (Toeplitz) si $m_{ij} = m_{kh}$ lorsque $i-j = k-h$.

La matrice M sera dite de type TC si l'on a $m_{ij} = m_{kh}$ quels que soient i,j,k,h vérifiant $i-j \equiv k-h \pmod n$.

Elle sera dite de type TAC si elle est de type T et si on a $m_{ij} = -m_{kh}$ quels que soient i,j,k,h vérifiant $i-j = k-h+n$.

On désignera par T,TC,TAC (éventuellement munis d'indices pour préciser la valeur de n) les ensembles de matrices ainsi décrites. On admettra que T,TC,TAC sont des espaces vectoriels complexes.

I.1 - Donner un exemple de matrice appartenant à : a) T_3.
b) TC_3.
c) TAC_3.

2 - Déterminer les dimensions des espaces vectoriels T_n, TC_n, TAC_n.

3 - Déterminer $TC_n \cap TAC_n$.

4 - a) A-t-on $T = TC_n + TAC_n$?

b) A-t-on $T_n = TC_n \oplus TAC_n$?

II - Soient deux vecteurs a et b de $\mathbb{C}^n$ définis par : $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

On appellera produit de convolution de a et b le vecteur c de $\mathbb{C}^n$ défini par : $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, où $\forall k \in \{1,\dots,n\}$:

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\, b_{k+1-j} + \sum_{j=k+1}^{n} a_j\, b_{n+1+k-j}.$$

Le produit de convolution de a et b sera noté a * b.

.../...

1 - Montrer que le produit de convolution est commutatif.

2 - Soient $A \in TC_n$, où $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$; on considère le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ défini par $Y = AX$.

Montrer que Y est le produit de convolution du premier vecteur colonne de A et de X.

3 - Soit $\Phi = (\omega_{kj})$, $1 \leqslant k,j \leqslant n$, la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\omega_{kj} = e^{\frac{2i\pi(k-1)(j-1)}{n}}$$

On désignera par F l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ représenté par Φ dans la base canonique.

Montrer que, quels que soient les vecteurs u et v de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\} \quad F(u * v)_k \ldots = F(u)_k \; F(v)_k .$$

Remarque : les notations $F(u)_k$ et $F(u * v)_k \ldots$, désignent les kièmes coordonnées des vecteurs F(u), F(u * v) ....

4 - Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et A une matrice de TC_n ; calculer :

$$\Phi A \Phi^{-1} E_j \qquad \text{pour} \qquad j \in \{1,\ldots,n\}$$

5 - Montrer que A est diagonalisable ; préciser, en fonction des éléments de la première colonne de A, les éléments de la diagonale de $\Phi A \Phi^{-1}$.

6 - On dit que deux matrices N et P de même ordre sont simultanément diagonalisables s'il existe une matrice Q telle que l'on ait à la fois $Q^{-1} N Q$ et $Q^{-1} P Q$ diagonales.

Montrer que les matrices de TC_n sont simultanément diagonalisables.

7 - Montrer que TC_n est une algèbre.

III.1 - Soit la matrice $S = (s_{ij})$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, de $M_n(\mathbb{C})$ définie comme suit :

$$\begin{cases} s_{i,i+1} = 1 & \text{si} \quad i = 1,2,\ldots,n-1 \\ s_{n1} = 1 \\ s_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer $S^2, S^3, \ldots, S^n$.

.../...

2 - Montrer que TC_n est égal à l'ensemble des matrices de la forme P(S) où P décrit $\mathbb{C}[X]$, espace vectoriel des polynômes de la variable X à coefficients complexes.

3 - Après avoir déterminé les valeurs propres de S, préciser à quelles conditions sur P la matrice P(S) est inversible.

4 - Montrer que, si $A \in TC_n$ et est inversible, son inverse A^{-1} appartient aussi à TC_n.

5 - Soient A et B deux éléments de TC_n ; exprimer la première colonne de la matrice AB en fonction des premières colonnes de A et de B. Comparer AB et BA.

IV.1 - On considère la matrice $Z = (z_{ij})$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, de $M_n(\mathbb{C})$, définie comme suit :

$$\begin{cases} z_{i,i+1} = 1 & \text{si} \quad i = 1,2,\ldots,n-1 \\ z_{n1} = -1 \\ z_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Calculer les puissances successives de Z.

b) Montrer que TAC_n est l'ensemble des matrices de la forme P(Z), où P décrit $\mathbb{C}[X]$.

2 - Soit la matrice diagonale R dont les éléments de la diagonale sont : $\left(1, e^{-\frac{i\pi}{n}}, e^{-\frac{2i\pi}{n}}, \ldots, e^{-(n-1)\frac{i\pi}{n}}\right)$

a) Calculer $R\,Z\,R^{-1}$.

b) Montrer l'équivalence :

$$N \in TAC_n \iff R\,N\,R^{-1} \in TC_n .$$

3 - Montrer que les éléments de TAC_n sont diagonalisables.

4 - Les matrices de TAC_n sont-elles simultanément diagonalisables ?

5 - Soient M et N deux matrices de TAC_n et A et B les matrices de TC_n définies par :

$$A = R\,M\,R^{-1} \quad \text{et} \quad B = R\,N\,R^{-1}$$

Déterminer la première colonne de MN en fonction des éléments des premières colonnes de M et N.

.../...

6 - Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que T_n n'est pas une algèbre.

7 - Les matrices de T_n sont-elles diagonalisables ?

V - Le but de cette partie est d'utiliser (lorsque ce sera nécessaire) des résultats démontrés dans l'étude de TC_n, afin d'en déduire des propriétés de $\mathbb{C}^n$ muni du produit de convolution.

1 - Soit les trois questions suivantes :

Question a :

Existence et (dans l'affirmative) détermination d'un élément e de $\mathbb{C}^n$, tel que :

$\forall a \in \mathbb{C}^n$, $a * e = e * a = a$.

Question b :

Condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément a de $\mathbb{C}^n$ possède un symétrique pour le produit de convolution (c'est-à-dire un élément a' de $\mathbb{C}^n$ tel que $a * a' = a' * a = e$).

Question c :

Associativité de *.

On désire trouver une bijection f de $\mathbb{C}^n$ sur TC_n qui possède des propriétés permettant de répondre à ces questions a,b et c. Quelles sont les propriétés que f doit posséder ? Trouver une telle bijection f de $\mathbb{C}^n$ sur TC_n.

2 - Répondre aux questions a,b,c.

3 - $\mathbb{C}^n$, muni de l'addition et du produit de convolution, est-il un anneau ?

* *

*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail